STAN NAPRĘŻENIA

ZADANIE 1

W danym punkcie stan naprężenia jest określony przez tensor T_σ .
Wyznaczyć wektor naprężenia $\sigma_{(n)}$ na płaszczyźnie określonej wektorem jednostkowym $n = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1000 & 300 & -600 \\ 300 & 500 & 100 \\ -600 & 100 & -300 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 2

Dany jest stan naprężenia określony tensorem T_σ . Sprawdzić, czy w każdym punkcie są spełnione różniczkowe równania równowagi, jeżeli współrzędne wektora sił masowych określają funkcje $f_x = -13y, \quad f_y = -2, \quad f_z = 0,$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 3

Dany jest tensor naprężenia .
Wyznaczyć wartości i kierunki główne tensora.

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 30 & -60 \\ 30 & 50 & 10 \\ -60 & 10 & -30 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 4

Tensor naprężenia z poprzedniego zadania rozłożyć na aksjator i dewiator.

ZADANIE 5

Dany jest płaski stan naprężenia określony w układzie osi *x*, *y* składowymi T_σ .
Wyznaczyć naprężenia główne, maksymalne styczne i położenia osi naprężeń głównych za pomocą metody analitycznej i wykreślnej (koło MOHRA).

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} -200 & -100 \\ -100 & 300 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 6

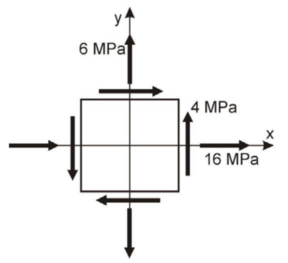
Dany jest płaski stan naprężenia określony w układzie osi x, y składowymi T_σ .
Wyznaczyć:

- naprężenia główne, maksymalne naprężenia styczne i położenia głównych osi naprężeń,
- tensor naprężenia w układzie osi obróconych o kąt $\varphi = 40^o$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} -200 & 150 \\ 150 & 300 \end{bmatrix}$$

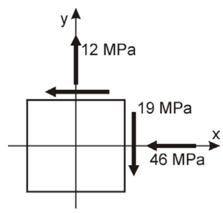
ZADANIE 7

W płaskim stanie naprężenia danym na rysunku wyznaczyć naprężenia w układzie obróconym o kąt 45^o



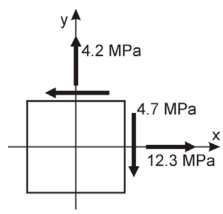
ZADANIE 8

W płaskim stanie naprężenia danym na rysunku wyznaczyć naprężenia w układzie obróconym o kąt -15^o



ZADANIE 9

W płaskim stanie naprężenia podanym na rysunku wyznaczyć: kierunki główne naprężeń i wartości naprężeń głównych, kierunki i wartości maksymalnych naprężeń stycznych.



Rozwiązania

ZADANIE 3

Obliczamy niezmienniki:

$$I_1^\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 120\,MPa\,,$$
$$I_2^\sigma = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = -4100\,(MPa)^2\,,$$
$$I_3^\sigma = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 = -349000\,(MPa)^3\,.$$

Równanie wiekowe:

$$\sigma^3 - I_1^\sigma \sigma^2 + I_2^\sigma \sigma - I_3^\sigma = 0\,.$$

Poszukujemy pierwiastków równania trzeciego stopnia.

Równanie postaci:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ma trzy rozwiązania

$$x_i = y_i - \frac{b}{3a} \qquad (i = 1, 2, 3)\,,$$

przy czym charakter rozwiązania zależy od wartości wyróżnika D:

$$D = q^2 + p^3\,, \qquad \text{gdzie} \quad q = \left(\frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{bc}{6a^2} + \frac{d}{2a}, \qquad p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}\,.$$

Jeśli:

$D < 0$,	to równanie ma 3 pierwiastki rzeczywiste,
$D > 0$,	to równanie ma 1 pierwiastek rzeczywisty i 2 zespolone,
$D = 0$,	to równanie ma 2 pierwiastki rzeczywiste, w tym jeden podwójny.

Przy wyznaczaniu wartości głównych tensora naprężenia wyróżnik D jest zawsze mniejszy od zera. Wówczas dalsze obliczenia przebiegają według następujących wzorów:

$$r = \operatorname{sgn}(q)\sqrt{|p|}\,, \qquad \cos(3\omega) = \frac{q}{r^3}\,,$$

$$y_1 = -2r\cos\omega\,, \quad y_2 = 2r\cos(60^o - \omega), \quad y_2 = 2r\cos(60^o + \omega).$$

W naszym zadaniu mamy:

$$p = \frac{3I_2^\sigma - (I_1^\sigma)^2}{9} = -2967\,(MPa)^2\,,$$

$$q = \left(\frac{-I_1^\sigma}{3}\right)^3 + \frac{I_1^\sigma I_2^\sigma}{6} - \frac{I_3^\sigma}{2} = -28500\,(MPa)^3\,, \quad D = q^2 + p^3 = -2{,}53 \cdot 10^{10}\,(MPa)^6\,,$$

$$\frac{b}{3a} = \frac{-I_1^\sigma}{3} = -\sigma_0 = -40\,MPa\,, \qquad \operatorname{sgn}(q) = +1\,,$$

$$r = +1 \cdot \sqrt{|-2967|} = 54{,}47\,MPa\,, \qquad \cos(3\omega) = \frac{q}{r^3} = 0{,}176347 \rightarrow \omega = 26{,}614^o\,,$$

$$y_1 = -2 \cdot 54{,}47 \cdot \cos(26{,}614^o) = -97{,}4\ MPa\ ,$$

$$y_2 = 2 \cdot 54{,}47 \cdot \cos(60^o - 26{,}614^o) = 91{,}0\ MPa\ ,$$

$$y_3 = 2 \cdot 54{,}47 \cdot \cos(60^o + 26{,}614^o) = 6{,}4\ MPa$$

Nieuporządkowane naprężenia główne wynoszą:

$$\sigma_1 = y_1 + \sigma_0 = -97{,}4 + 40 = -57{,}4\ MPa\ ,$$
$$\sigma_2 = y_2 + \sigma_0 = 91{,}0 + 40 = 131{,}0\ MPa\ ,$$
$$\sigma_3 = y_3 + \sigma_0 = 6{,}4 + 40 = 46{,}4\ MPa\ .$$

Po uporządkowaniu $(\sigma_I \ge \sigma_{II} \ge \sigma_{III})$ otrzymujemy poszukiwane WARTOŚCI GŁÓWNE:

$$\sigma_I = \sigma_2 = 131{,}0\ MPa\ ,$$
$$\sigma_{II} = \sigma_3 = 46{,}4\ MPa\ ,$$
$$\sigma_{III} = \sigma_1 = -57{,}4\ MPa\ .$$

KIERUNKI GŁÓWNE możemy wyznaczyć z równań:

$$(\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = 0\ ,$$
$$\tau_{yx}n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y + \tau_{yz}n_z = 0\ ,$$
$$\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + (\sigma_z - \sigma)n_z = 0\ ,$$
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1\ .$$

Do wyznaczenia któregokolwiek kierunku głównego wykorzystamy pierwsze dwa równania oraz równanie czwarte. Wprowadzimy pomocnicze niewiadome:

$$\lambda_2 = \frac{n_y}{n_x}\ , \qquad \lambda_3 = \frac{n_z}{n_x}\ .$$

Po podzieleniu pierwszych dwóch równań przez n_x otrzymujemy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi λ_2 i λ_3:

$$(a) \qquad \begin{cases} \tau_{xy}\lambda_2 + \tau_{xz}\lambda_3 = \sigma - \sigma_x \\ (\sigma_y - \sigma)\lambda_2 + \tau_{yz}\lambda_3 = -\sigma_{xy} \end{cases}\ ,$$

$$(b)\ \textit{skąd} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = \left[(\sigma - \sigma_x)\tau_{yz} + \tau_{xy}\tau_{xz}\right]/W \\ \lambda_3 = \left[-\tau_{xy}{}^2 + (\sigma - \sigma_x)(\sigma - \sigma_y)\right]/W \end{cases}\ ,$$

gdzie $W = \tau_{xy}\tau_{yz} + \tau_{xz}(\sigma - \sigma_y)$. Z czwartego równania obliczymy n_x:

$$(c) \qquad n_x = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}\ ,$$

co pozwala wyznaczyć pozostałe współrzędne n_y i n_z:

$$(d) \qquad \begin{aligned} n_y &= \lambda_2 n_x\ , \\ n_z &= \lambda_3 n_x\ . \end{aligned}$$

Podstawiwszy we wzorach (b) kolejno $\sigma = \sigma_I$, $\sigma = \sigma_{II}$ oraz $\sigma = \sigma_{III}$, otrzymamy współrzędne $(n_x, n_y, n_z)_I$, $(n_x, n_y, n_z)_{II}$ oraz $(n_x, n_y, n_z)_{III}$. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy:

	σ [MPa]	λ_2	λ_3	n_1	n_2	n_3
I	131,0	0,3270	-0,3524	-0,9012	-0,2947	0,3176
II	46,4	-4,5446	-1,3796	0,2060	-0,9364	-0,2842
III	-58,4	-0,5003	2,3730	0,3812	-0,1907	0,9046

Sprawdźmy ortogonalność wersorów wyznaczających kierunki główne:

$$(n_x)_I \cdot (n_x)_{II} + (n_y)_I \cdot (n_y)_{II} + (n_z)_I \cdot (n_z)_{II} = -0{,}00005 \approx 0\,,$$
$$(n_x)_I \cdot (n_x)_{III} + (n_y)_I \cdot (n_y)_{III} + (n_z)_I \cdot (n_z)_{III} = 0{,}00004 \approx 0\,,$$
$$(n_x)_{II} \cdot (n_x)_{III} + (n_y)_{II} \cdot (n_y)_{III} + (n_z)_{II} \cdot (n_z)_{III} = 0{,}00001 \approx 0\,,$$
$$(n_x)_I \cdot (n_x)_I + (n_y)_I \cdot (n_y)_I + (n_z)_I \cdot (n_z)_I = 0{,}99998 \approx 1\,,$$
$$(n_x)_{II} \cdot (n_x)_{II} + (n_y)_{II} \cdot (n_y)_{II} + (n_z)_{II} \cdot (n_z)_{II} = 1{,}0000506 \approx 1\,,$$
$$(n_x)_{III} \cdot (n_x)_{III} + (n_y)_{III} \cdot (n_y)_{III} + (n_z)_{III} \cdot (n_z)_{III} = 0{,}99998 \approx 1\,.$$

Naprężenia główne ilustruje tensor naprężenia:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 131{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 46{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & -57{,}4 \end{bmatrix}.$$

Sprawdźmy wartości niezmienników dla tensora naprężeń wyrażonego w kierunkach głównych:

$$I_1^\sigma = 131{,}0 + 46{,}4 - 57{,}4 = 120\,MPa\,,$$
$$I_2^\sigma = 131{,}0 \cdot 46{,}4 + 131{,}0 \cdot (-57{,}4) + 46{,}4 \cdot (-57{,}4) = -4104 \approx -4100\,(MPa)^2\,,$$
$$I_3^\sigma = 131{,}0 \cdot 46{,}4 \cdot (-57{,}4) = 348900 \approx -349000\,(MPa)^3\,.$$

Graficzną ilustrację wyjściowego tensora naprężenia oraz usytuowanie kierunków głównych i naprężenia główne przedstawiono na rysunku.